Transformadas y series de Fourier en tiempo discreto

DTFT y DFS: Definiciones

	Transformada de Fourier (DTFT)	Serie de Fourier (DFS)
Ec. de síntesis	$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega$	$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$
Ec. de análisis	$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$	$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$

DTFT y DFS: Propiedades

	Señal temporal $\boldsymbol{x[n], y[n]}$	Transformada (DTFT) $\boldsymbol{X(\Omega), Y(\Omega)}$	Serie (DFS) $\boldsymbol{c_{(x)k}, c_{(y)k}}$
Periodicidad del espectro	$\forall m \in \mathbb{Z}$	$X(\Omega) = X(\Omega + m2\pi)$	$c_k = c_{k+mN}$
Linealidad	$ax[n] + by[n]$	$aX(\Omega) + bY(\Omega)$	$ac_{(x)k} + bc_{(y)k}$
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(-\Omega)$	$c^*_{-k} = c^*_{N-k}$
Inversión temporal	$x[-n]$	$X(-\Omega)$	$c_{-k} = c_{N-k}$
Desplazamiento en DC	$x[n] + A$	$X(\Omega) + A\delta(\Omega)$	$c_k\ (\forall k \neq 0)\,;\ c_0 + A$
Desplazamiento temporal	$x[n - n_0]$	$X(\Omega)e^{-j\Omega n_0}$	$c_k\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_0}$
Desplazamiento frecuencial	$x[n]e^{j\Omega_0 n}$	$X(\Omega - \Omega_0)$	
Convolución	$x[n] * y[n]$	$X(\Omega)Y(\Omega)$	
Modulación	$x[n]\, y[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Theta)Y(\Omega - \Theta)d\Theta$	
Derivación en frecuencia	$n\, x[n]$	$j\frac{d}{d\Omega}X(\Omega)$	
Dualidad	c_n	$\nexists$	$\frac{1}{N}\, x[-k]$
Energía (Rayleigh)	$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n]\rvert^2$	$E = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \lvert X(\Omega)\rvert^2 d\Omega$	
Potencia (Parseval)	$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \lvert x[n]\rvert^2$		$P = \sum_{k=0}^{N-1} \lvert c_k\rvert^2$

Relación entre DTFT y DFS: espectro (periódico) continuo y discreto

$x[n]$ = secuencia no periódica $\rightleftharpoons$ espectro continuo $X(\Omega) = DTFT\{x[n]\}$	$c_k = \frac{1}{N}X\left(\Omega = k\frac{2\pi}{N}\right)$
versión periódica $x_p[n]$ $\rightleftharpoons$ espectro discreto $X_p(\Omega) = 2\pi\sum_0^{N-1} c_k\delta\left(\Omega - k\frac{2\pi}{N}\right)$	

Se entiende que $x_p[n] = x[n] * \sum_{-\infty}^{\infty}\delta[n - mN]\,;$ donde $m \in \mathbb{Z}\,,\ \ N =$ periodo

DFS: Periodicidad

$x[n]$ es secuencia periódica $\Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{Z}\,;\ x[n] = x[n+N]\ \ \forall n$

$x[n] = e^{j\Omega_0 n} = \cos(\Omega_0 n) + j\sin(\Omega_0 n)$ es secuencia periódica de periodo $= N \Leftrightarrow \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m \in \mathbb{Z}}{N}$

DTFT y DFS: Simetrías

Señal temporal $x[n]$	**Transformada $X(\Omega)$**	**Serie c_k**
$x[n] =$ señal real	$X(\Omega) = X^*(-\Omega)$: simetría hermítica $\begin{cases} \lvert X(\Omega)\rvert = \lvert X(-\Omega)\rvert & \text{: par} \\ \mathrm{Arg}[X(\Omega)] = -\mathrm{Arg}[X(-\Omega)] & \text{: impar} \end{cases}$ $\begin{cases} \mathrm{Re}[X(\Omega)] = \mathrm{Re}[X(-\Omega)] & \text{: par} \\ \mathrm{Im}[X(\Omega)] = -\mathrm{Im}[X(-\Omega)] & \text{: impar} \end{cases}$	$c_k = c_{-k}^*$: simetría hermítica $\begin{cases} \lvert c_k\rvert = \lvert c_{-k}\rvert & \text{: par} \\ \mathrm{Arg}[c_k] = -\mathrm{Arg}[c_{-k}] & \text{: impar} \end{cases}$ $\begin{cases} \mathrm{Re}[c_k] = \mathrm{Re}[c_{-k}] & \text{: par} \\ \mathrm{Im}[c_k] = -\mathrm{Im}[c_{-k}] & \text{: impar} \end{cases}$
$x[n] =$ real par	$X(\Omega) = \mathrm{Re}[X(\Omega)] =$ real y par	$c_k = \mathrm{Re}[c_k] =$ real y par
$x[n] =$ real impar	$X(\Omega) = j\mathrm{Im}[X(\Omega)] =$ imaginario e impar	$c_k = j\mathrm{Im}[c_k] =$ imaginario e impar

DTFT: Pares transformados

	Señal temporal $x[n]$	**Transformada $X(\Omega)$; $-\pi \le \Omega < \pi$**
Impulso unitario	$\delta[n]$	1
Nivel DC	1	$2\pi\delta(\Omega)$
Impulso unitario desplazado	$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\Omega n_0}$
Exponencial compleja	$e^{j(\Omega_0 n+\theta)}$	$2\pi e^{j\theta}\,\delta(\Omega-\Omega_0)$
Función coseno	$\cos(\Omega_0 n)$	$\pi[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)]$
Función seno	$\sin(\Omega_0 n)$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\Omega-\Omega_0)-\delta(\Omega+\Omega_0)]$
Pulso rectangular	$\begin{cases} 1\,, & \lvert n\rvert \le L/2 \\ 0\,, & \lvert n\rvert > L/2 \end{cases}$	$\dfrac{\sin\left(\Omega\frac{L+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$
Sinc tiempo discreto	$\dfrac{\sin(\Omega_c n)}{\pi\, n}\ ; 0 < \Omega_c < \pi$	$\Pi\left(\dfrac{\Omega}{2\Omega_c}\right) = \begin{cases} 1, & 0 \le \lvert\Omega\rvert < \Omega_c \\ 0\,, & \Omega_c < \lvert\Omega\rvert < \pi \end{cases}$
Tren de impulsos	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN]$	$\frac{2\pi}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \delta\left(\Omega - k\frac{2\pi}{N}\right)\ ;\ \ 0 \le \Omega < 2\pi$

Convolución de secuencias

Definición: $x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, y[n-k]$

Propiedad conmutativa: $x[n] * y[n] = y[n] * x[n]$

Propiedad asociativa: $x[n] * (y[n] * z[n]) = (x[n] * y[n]) * z[n]$

Propiedad distributiva: $x[n] * (y[n] + z[n]) = (x[n] * y[n]) + (x[n] * z[n])$

Elemento neutro: $x[n] * \delta[n] = \delta[n] * x[n] = x[n]$